數學傳播　50卷1期, pp. 43-54

輪環多面體框正多面體的屬性數及其建構在數學算板上的實踐

林保平

一、數學算板的輪環多面體簡介

林 (民112) 曾提出數學算板中的可扭轉輪環多面體製作程式, 並展示 4-4, 7-5, 15-10 的輪環多面體, 如圖 1 所示。

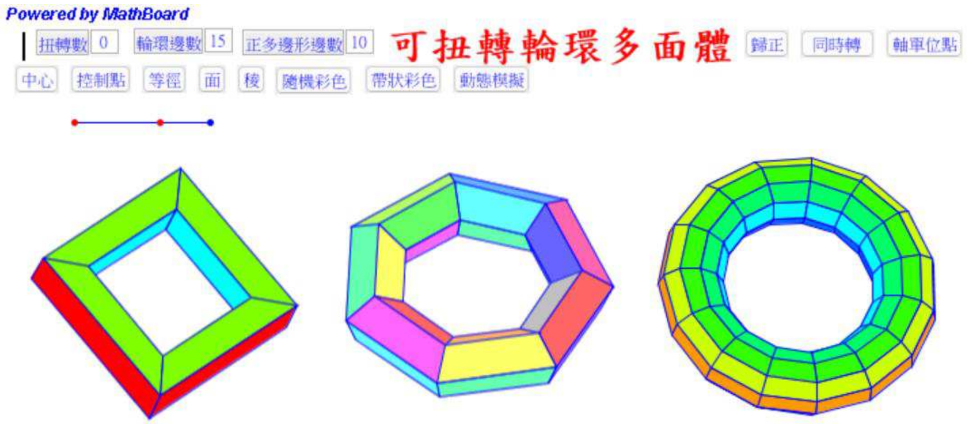


圖 1: 4-4, 7-5, 15-10 三種輪環多面體

q 邊的正多邊形頂點繞一條與其共平面且不相交的直線 (中心軸) 旋轉 $k\cdot\dfrac{2\pi}{p}$, 其中 $k=1,2,\ldots,p$, 再用線段連接對應的多邊形頂點而得成多面體, 就是 $p-q$ 輪環多面體, 它的面均為梯形或矩形。這個輪環多面體的邊構成兩類正多邊形, q 邊的正多邊形稱為極向的 (poloidal) 正多邊形, 它們與中心軸共平面, 極向的正多邊形是全等的, 另一類與中心軸垂直的 p 邊正多邊形, 稱為環向的 (toroidal) 正多邊形, 環向的 p 邊正多邊形並不全等。若極向正多邊形為圓, 繞中心軸迴轉而得的曲面就是輪環面 (torus), 可視為 $p-q$ 輪環多面體的極限圖形。圖 2 展

示的是 7-5 輪環面框架及其極向與環向正多邊形。

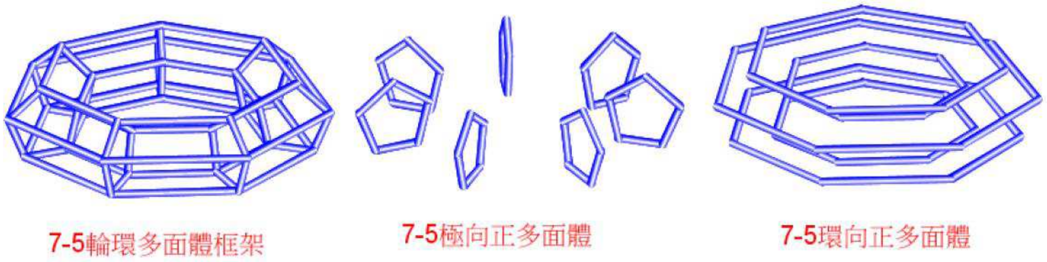


圖 2: 7-5 輪環面框架及其極向與環向正多邊形

程式中輸入 p, q 值即可取得 $p-q$ 輪環多面體, 並做多種變換。圖中按鈕「輪環邊數」右方輸入框中的值就是 p, 目前呈現數值爲 15, 這就是輪環多面體環向正多邊形數。按鈕「正多邊邊數」右方輸入框中的值就是 q, 目前呈現值爲 10, 這就是輪環多面體的極向正多邊形數。其實數學算板所建構的正是 Szilassi (1986, 2004) 所提三種規則輪環多面體 (regular toroidal polyhedron) 中最常見的一種 T_2 : 每個面有 4 個邊, 每個頂點有 4 個邊連結。但數學算板設計的「規則」輪環多面體的 p, q 多邊形爲正 p, q 多邊形, 這種輪環多面體, 我們特稱其爲「正」輪環多面體。圖中線段上的點控制正多邊形的頂點的起始點位置, 線段表示 $[0,1]$, 代表 0 至 360 度。用滑鼠移動此點, 將改變此多邊形的頂點的起點位置, 構成相同 p, q 值的不同 $p-q$ 正輪環多面體, 這樣的輪環多面體變形, 我們稱之爲極向轉 (poloidal rotation), 是一種特殊的扭轉變形 (圖 1 中的扭轉數輸入框內的 0, 表示這是可極向轉的輪環多面體)。數學算板中, 輪環多面體的製作及其極向轉動態變化參看 影片 1 (注意: 正輪環多面體非正多面體, 因其面並非全等)。

圖 3 展示的是 30-15 的輪環多面體及它的變形, $p-q$ 值夠大時可視爲「輪環面」。

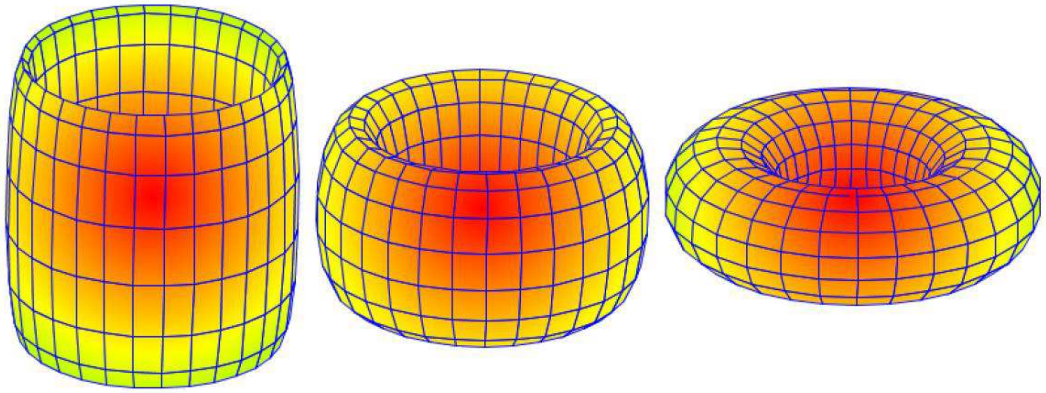


圖 3: 30-15 輪環多面體及其變形

二、輪環多面體框正多面體的生成

在數學算板的輪環多面體中, 極向的 q 邊正多邊形頂點的起始位置是可變的, 圖 4 展示 $p = q$, $q = 3, 4, 5$ 的三類正輪環多面體。對於這三類的正輪環多面體, 我們令其向外的邊與面爲平行於旋轉軸 (z 軸) 且面垂直於 XY 平面, 利用這三類正輪環多面體, 我們可以製作以正輪環多面體爲框架的柏拉圖多面體, 我們稱它爲輪環多面體框正多面體, 簡稱輪環框正多面體。圖中 C 點控制極向角, 是控制輪環框正多面體展開時, 框面之間的夾角, 移動 C 點至兩端點時, 框面的夾角就是正多面體兩相鄰面的夾角。移動 C 點可將展平圖向上或向下作極向轉, 將展開圖併合爲「輪環多面體框柏拉圖多面體」(toroidal skeletal Platonic polyhedron), 3-3, 4-4, 5-5 構成的正輪環框極向角是由數值方法推出的近似值, 內訂於數學算板中。其實對於任意 $q > 2$, $3 - q$, $4 - q$, $5 - q$ 的輪環多面體及相應的正多面體, 都有相應的極向角, 可作出不同的輪環框正多面體。

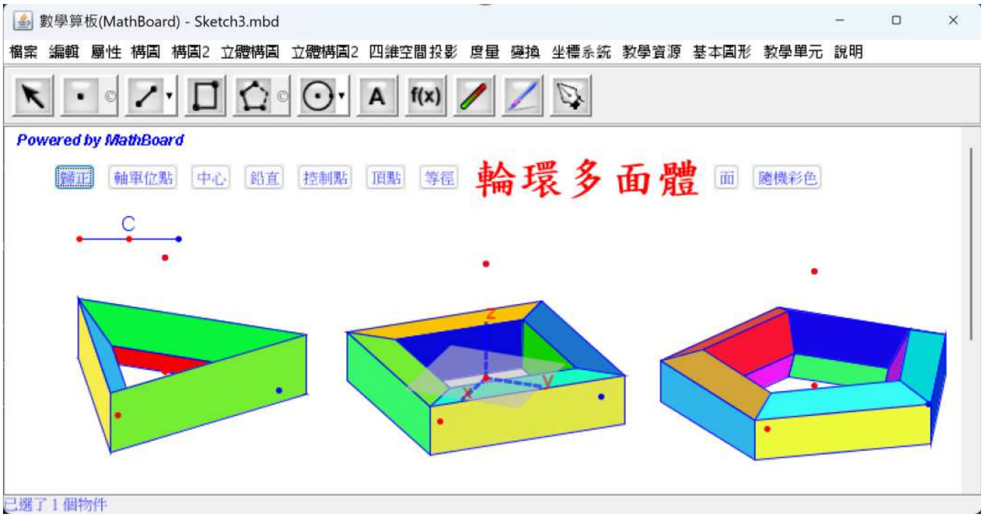


圖 4: 構成輪環框正多面體的 3-3, 4-4, 5-5 輪環多面體的圖形

以輪環框正十二面體的製作爲例, 我們先作出 5-5 正輪環多面體, 分別以垂直 XY 平面的 5 個面將此多面體的頂點作鏡射, 得到的點再作出鏡射的 5-5 正輪環多面體, 此時, 移動 C 點就可控制這兩個 5-5 輪環多面體的夾角。繼續透過鏡射, 作出類似正十二面體展開圖的「輪環框正十二面體展開圖」如圖 5 所示, 其展開圖的形狀可以自行設計。圖 5 展示是圖形製作完成後整理出來的程式畫面, 其中的按鈕有些是原始製作時的按鈕, 有些是個別 5-5 輪環多面體按鈕的綜合按鈕, 右上方角度是指兩個 5-5 輪環框面 (兩個相鄰正五邊形面) 的夾角。圖 6 展示的是相應的正十二面體的展開圖, 對照圖 4 可以看出它是框圖上下兩面所含的正十二面體展開圖之一, 平行於 XY 平面。

由於原始的 5-5 正輪環多面體是可極向轉的, 因此, 鏡射後的輪環多面體也是可以極向轉

的。移動控制點 C, 我們可以將所有的 5-5 輪環多面體同時極向轉, 使圖形拼合成輪環框正十二面體。

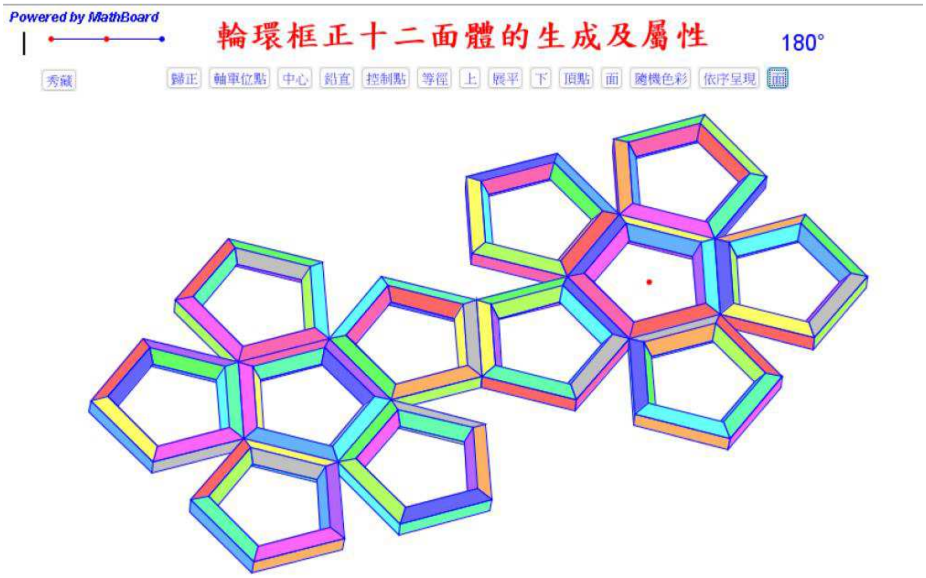


圖 5: 輪環框正十二面體展開圖

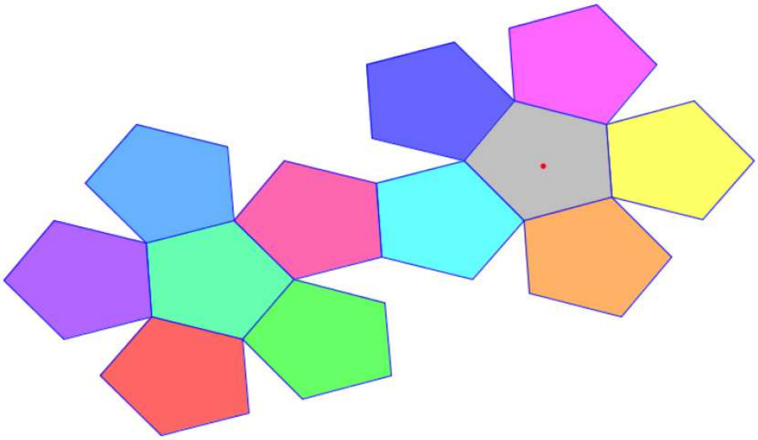


圖 6: 與圖 5 相應的正十二面體展開圖

圖 7 展示的是極向轉使框面夾角成 153.14° 及 116.57° 的圖形, 其中 116.57° 就是正十二面體兩相鄰面的夾角近似值, 右圖就是透過鏡射而得的輪環框正十二面體。數學算板的立體圖形都建立在一個 (或多個) 可旋轉的坐標系統上, 透過旋轉坐標系統, 可從四面八方來觀察該系統內圖形物件的形狀。

圖 8、圖 9 展示的是輪環框正四面體、正六面體、正八面體, 正二十面體及其展開圖 (框面夾角 180°)。輪環框正十二面體的生成及動態展示, 參看 影片 2。

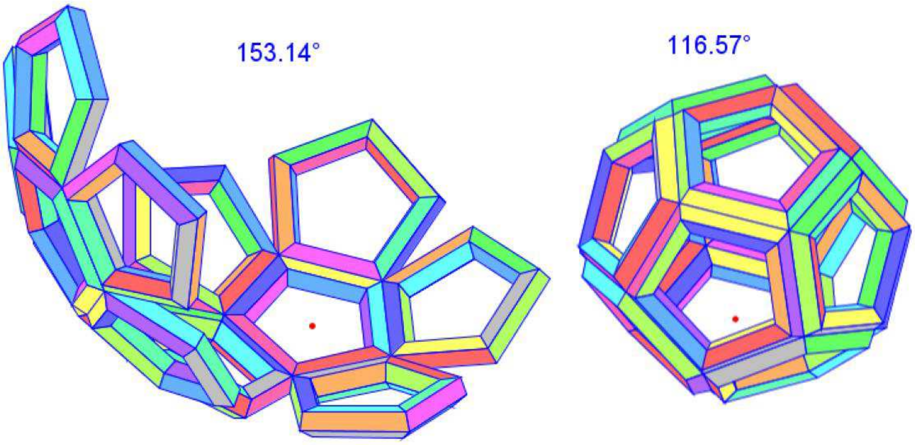


圖 7: 左圖: 極向轉使框面夾角成 153.14°　　右圖: 輪環框正十二面體 (夾角 116.57°)

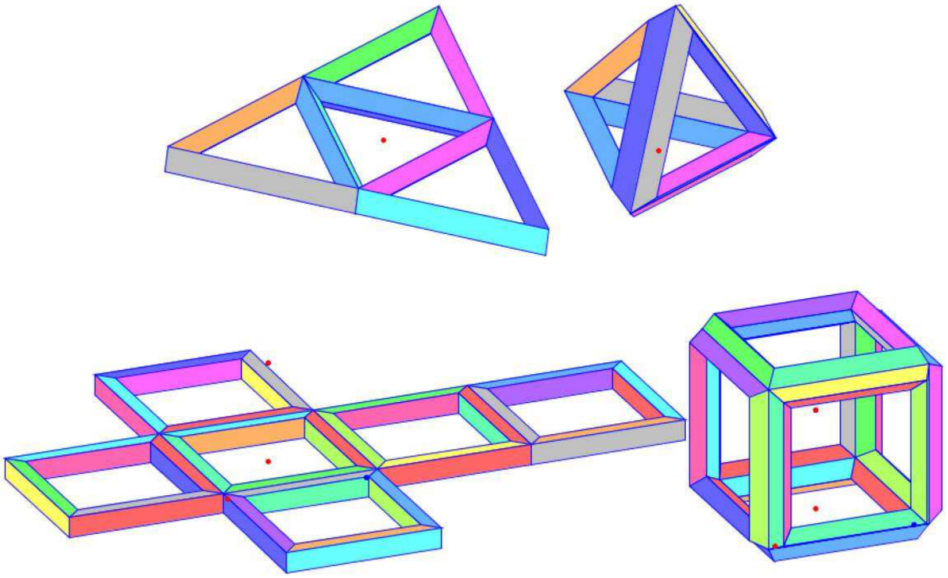
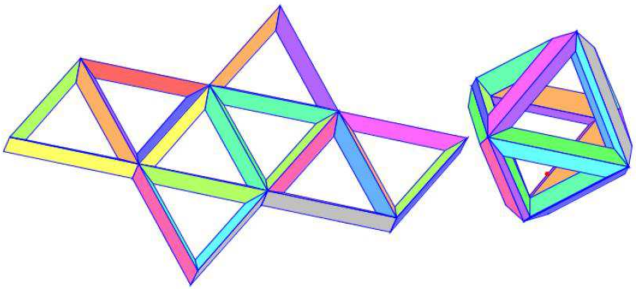


圖 8: 輪環框正四面體 (框面夾角 70.53°)、正六面體 (框面夾角 90°) 及其展開圖 (框面夾角 180°)



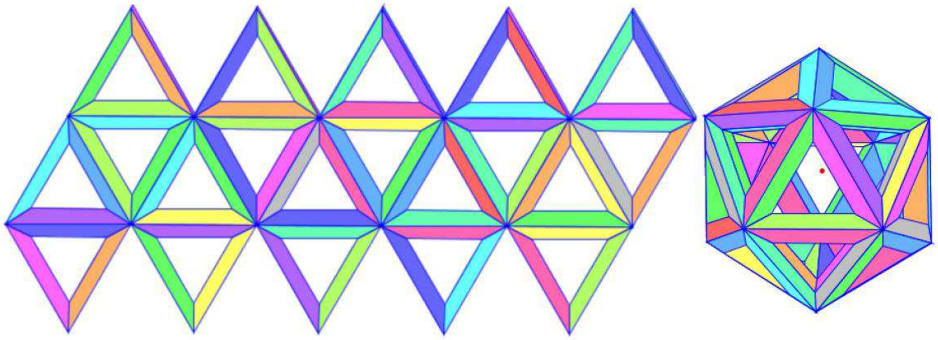


圖9: 輪環框正八面體 (框面夾角 109.47°)、正二十面體 (框面夾角 138.19°) 及其展開圖 (框面夾角 180°)

三、多面體的尤拉數與曲面的屬性數

設 C 爲多面體, $V_C = C$ 的頂點數, $F_C = C$ 的面數, $E_C = C$ 的邊數, 對任意凸多面體 C 我們都有 $V_C + F_C = E_C + 2$ 的關係, 稱爲尤拉多面體公式, 我們可以很容易地檢驗這個公式, 林 (民, 107) 對多種多面體的尤拉公式都有計算描述。但對於非凸多面體, 這個公式就不一定適用了! 圖 2 的輪環多面體, 它們的頂點數、面數及邊數分別爲 pq、pq、$2pq$ 顯然不合於公式。事實上 $V_C + F_C - E_C$ 是一個拓樸不變量, 稱爲尤拉特徵數 X (Euler Characteristic), 通常記爲 X, 對凸多面體而言 $X = 2$, 然而對圖 2 的輪環多面體而言 $X = 0$。

其實對曲面而言, 另有一個不變量可以簡單描述曲面的分類屬性, 稱爲曲面的拓樸屬性數 (genus), 屬性數是一個描述曲面拓樸複雜度的基本性質, 通常可以想像爲該曲面上「把手」或「洞」的數量。更精確地說, 對於一個可定向的封閉曲面而言, 其屬性數是指在不使曲面分離的情況下, 最多可以進行多少條彼此不相交的切割。球面沒有把手或洞, 因此它的屬性數就是 0, 簡單的輪環面 (只有一個孔), 他的屬性數就是 1。事實上, 多面體 C 的拓樸屬性數 (記爲 g_C) 與它的尤拉特徵數 (X_C) 有下列關係, $X_C = 2 - 2g_C$, 這正好驗證了圖2的輪環面的屬性數是 1, 尤拉特徵數爲 0。

在輪環框正多面體的生成過程中, 我們會得到一些過程物件, 鏡射就好像將全等的兩個正輪環多面體的某個全等的面黏貼起來一樣。每作一個鏡射, 我們就生成一個新的輪環多面體, 這些輪環多面體都有屬性數, 我們列出由尤拉推出屬性數的幾個原則供大家參考。

設 C 爲多面體, $X_C = C$ 的尤拉特徵數, $g_C = C$ 的拓樸屬性數, 則 (i) $X_C = V_C + F_C - E_C$ (ii) $X_C = 2 - 2g_C$。

設 A, B 爲兩個多面體, $A + B$ 表示黏貼 A, B 多邊形中全等的面而得的新多面體。

(1) 黏貼 A, B 中一組全等的 n 邊形面, 則

$$\begin{aligned}
V_{A+B} &= V_A + V_B - n,\\
F_{A+B} &= F_A + F_B - 2,\\
E_{A+B} &= E_A + E_B - n,\\
\because\ X_{A+B} &= (V_A + V_B - n) + (F_A + F_B - 2) - (E_A + E_B - n),\\
\therefore\ X_{A+B} &= X_A + X_B - 2,\\
\therefore\ 2 - 2g_{A+B} &= 2 - 2g_A + 2 - 2g_B - 2,\\
\therefore\ g_{A+B} &= g_A + g_B.
\end{aligned}$$

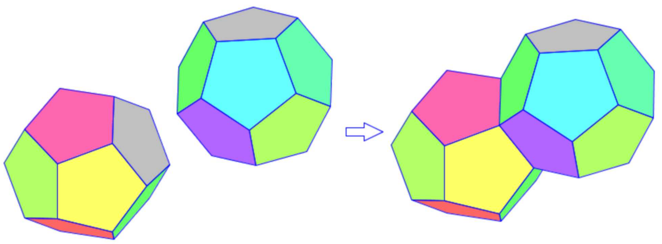


圖 10: 黏貼兩個屬性數均爲 0 的正十二面體得到屬性數 0 的新多面體

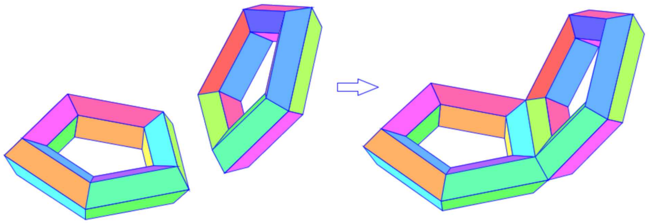


圖 11: 黏貼兩個屬性數均爲 1 的輪環多面體得到屬性數 2 的新多面體

(2) 同時黏貼 k 個不相鄰 n 邊形面

$$\begin{aligned}
V_{A+B} &= V_A + V_B - kn,\\
F_{A+B} &= F_A + F_B - 2k,\\
E_{A+B} &= E_A + E_B - kn,\\
\because\ X_{A+B} &= (V_A + V_B - kn) + (F_A + F_B - 2k) - (E_A + E_B - kn),\\
\therefore\ X_{A+B} &= X_A + X_B - 2k,\\
\therefore\ 2 - 2g_{A+B} &= 2 - 2g_A + 2 - 2g_B - 2k,\\
\therefore\ g_{A+B} &= g_A + g_B + k - 1.
\end{aligned}$$

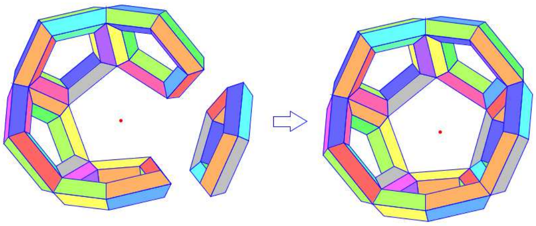


圖 12: 黏貼兩個屬性數分別爲 4, 1 的多面體於 2 個不相鄰面, 得到屬性數 6 的新多面體

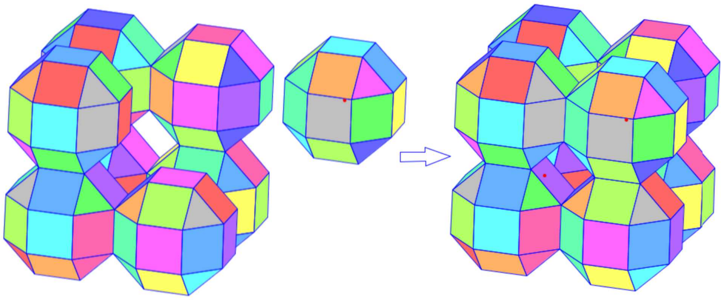


圖 13: 黏貼兩個屬性數分別爲 3, 0 的多面體於 3 個不相鄰面, 得到屬性數 5 的新多面體

(3) 黏貼 k 個相鄰成環狀的 n 邊形面

$$\begin{aligned}
V_{A+B} &= V_A + V_B - k(n-2),\\
F_{A+B} &= F_A + F_B - k,\\
E_{A+B} &= E_A + E_B - k(n-1),\\
\because\ X_{A+B} &= (V_A + V_B - kn + 2k) + (F_A + F_B - k) - (E_A + E_B - kn + k),\\
\therefore\ X_{A+B} &= X_A + X_B,\\
\therefore\ 2 - 2g_{A+B} &= 2 - 2g_A + 2 - 2g_B,\\
\therefore\ g_{A+B} &= g_A + g_B - 1.
\end{aligned}$$

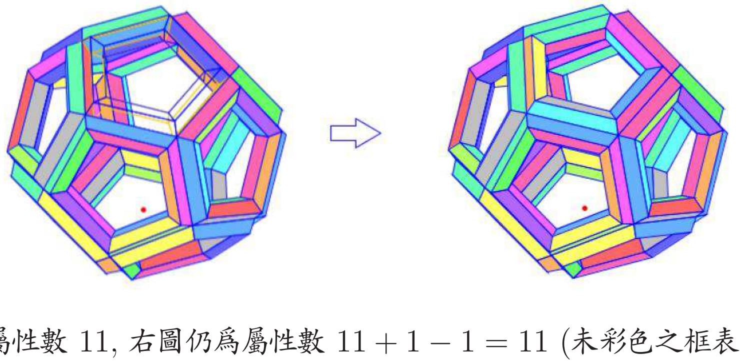


圖 14: 左圖屬性數 11, 右圖仍爲屬性數 $11+1-1=11$ (未彩色之框表示尚未黏貼)

利用這些原則, 我們可以推出輪環框正四、正六、正八、正十二及正二十面體的的屬性數分別爲 3、5、7、11、19, 若從孔數來推斷屬性數, 其實就是正輪環框框面數減 1, 而其「展開圖」(尚未拼合時) 的輪環多面體的屬性數就是正輪環框框面數。

其實在我們「輪環框正多面體」生成程式中, 我們有按鈕可以展示生成變形時的圖形, 如前面圖 11、圖 12 及圖 14。圖 15 展示的就是許多其他框狀多面體的例子, 這些部分成分的框面圖 (diminished sketeletal toroidal polyhedron), 其實都可以算出它們的屬性數, 他們也可以看成爲: 挖掉若干個框面而得的新輪環多面體 (圖中沒有顏色的框面表示被挖掉的框面)。

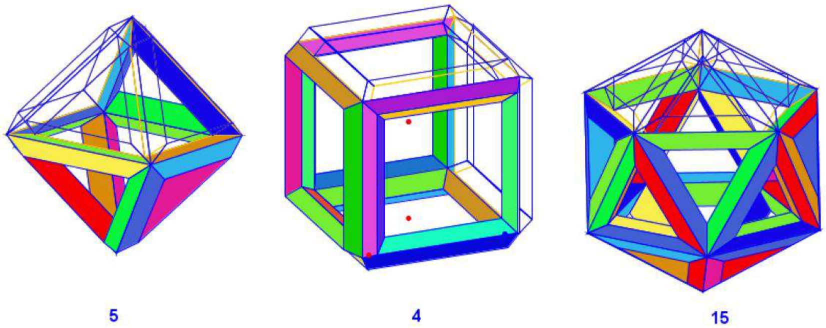


圖 15: 刪減面框的輪環多面體及其屬性數

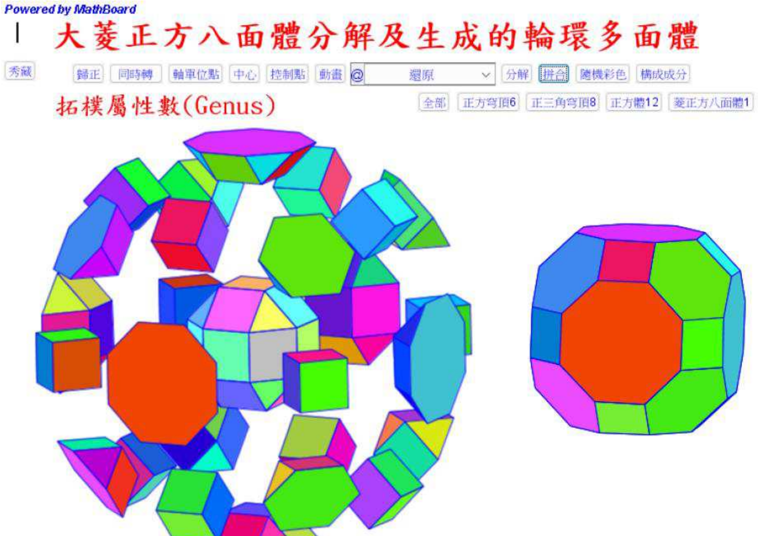


圖 16: 大菱正方八面體 (右圖) 及其分解 (左圖)

四、大菱正方八面體的分解及生成的輪環多面體屬性

前面討論的輪環多面體是所謂的「輪環框正多面體」是透過正輪環多面體鏡射 (黏貼) 構成的, 其實透過挖洞也可以得到輪環多面體。圖 16 展示的是大菱正方八面體 (*Great rhom-*

bicuboctahedron) 及它的分解圖。圖 16 右圖大菱正方八面體是由 12 個正方形面, 8 個正六邊形面, 6 個正八邊形面, 48 個頂點及 72 條邊構成的。圖 16 左圖是將其分解後得到的多面體: 6 個正方形穹頂體 (square cupola)、8 個正三角形穹頂體 (triangular cupola), 12 個正方體, 1 個菱正方八面體 (rhombicuboctahedron), 圖 16 右圖爲大菱正方八面體。數學算板的這個程式中, 我們可以選取每一類多面體, 透過滑鼠旋轉該類多面體, 從四面八方來觀察他們的形狀。

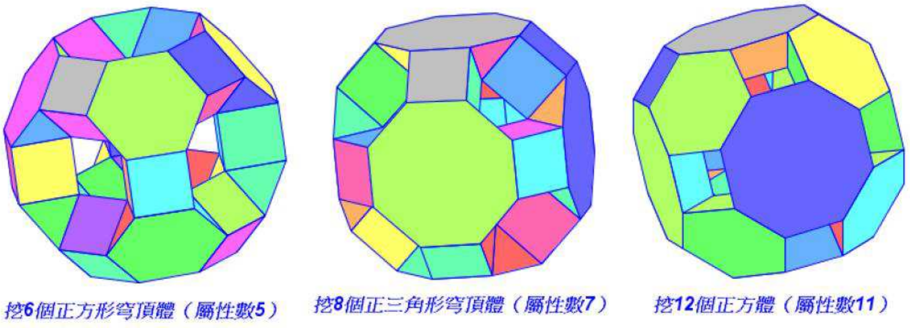


圖 17: 挖出三類多面體及中間的菱正方八面體而得的輪環多面體及其屬性數

圖 17 展示分別挖出三類多面體 (6 個正方形穹頂體、8 個正三角形穹頂體、12 個正方體) 及中間的菱正方八面體後得到的輪環多面體。這也就是
`https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_polyhedron` 中描述的屬性數 5, 7, 11 由 truncated cuboctohedron (本文用 Great rhombicuboctahedron) 分解而得 (1) 8 個正三角形穹頂體、12 個正方體 (2) 6 個正方形穹頂體 12 個正方體 (3) 6 個正方形穹頂體、8 個正三角形穹頂體黏貼全等面組合而得的輪環多面體, 他們的頂點、邊、面的數量分別是 (1) 72、168、88; (2) 72、168、84 (3) 72、168、76 它們的尤拉數分別爲 -8、-12、-20 換算後的拓樸屬性數就是 5, 7, 11。若由輪環面的孔數來看, 就是外方挖掉的多面體數量減 1。

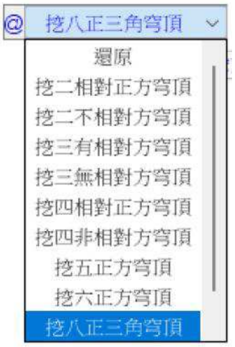


圖 18: 程式中挖除多面體的選項

在我們的多面體分解及生成輪環多面體的程式中, 除了中間的必挖的菱正方八面體外, 我們有挖除多面體的選項, 圖 18 展示的就是部分選項, 每一種挖掘都可構成輪環多面體, 其屬性

也很容易由挖的多面體數獲得。每一種情況都可以分解合併, 並透過旋轉坐標軸, 從四面八方來觀察。大菱正方八面體程式的運作參看動畫 影片 3。

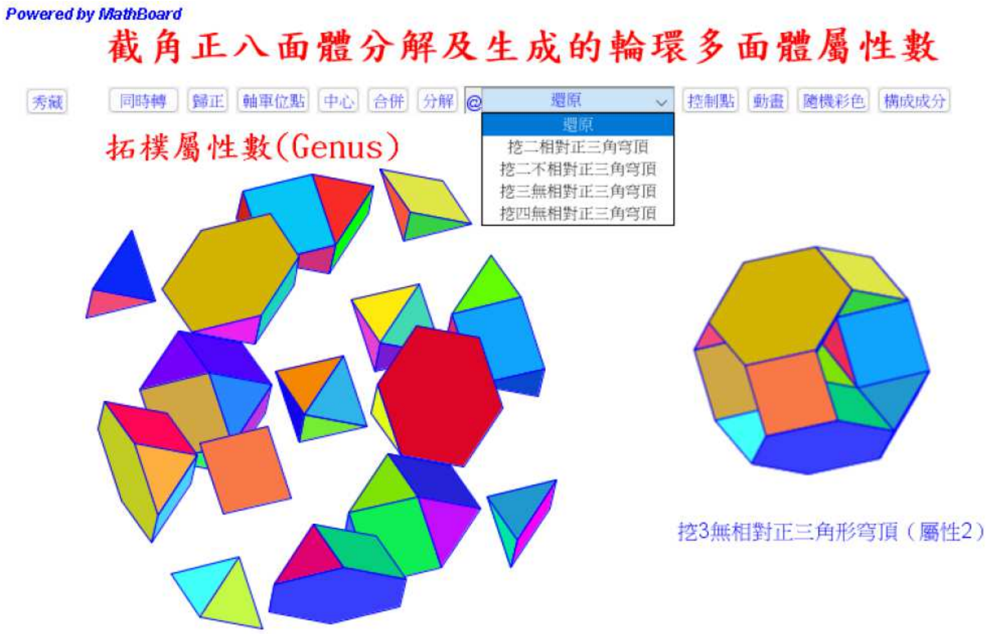


圖 19: 截角正方八面體的分解程式畫面

除了大菱正方八面體分解外, 數學算板也有「截角正八面體分解及生成的輪環多面體」程式 (圖 19)、「截角正方體及其去方穹頂的輪環多面體」程式 (圖 20)。前者中間必挖的是正八面體, 後者中間必挖的是正方體。截角正八面體分解及生成的輪環多面體程式參看動畫 影片 4。截角正方體及其去方穹頂的輪環多面體程式參看動態 影片 5。

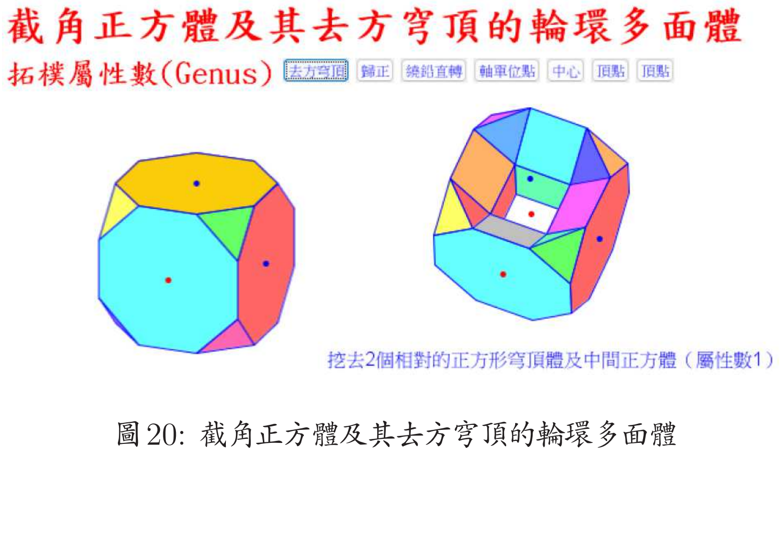


圖 20: 截角正方體及其去方穹頂的輪環多面體

五、結語

本文首先介紹輪環多面體, 並透過5-5正輪環多面體及其鏡射, 討論數學算板中輪環框正十二面體的製作, 先作出其對應於「正十二面體展開圖」的「展開圖」, 再用「極向轉」將展開圖變形拼合成輪環框正十二面體, 其他的輪環框正多面體也可以同樣地製作。我們也討論了尤拉數及曲面的屬性數, 並提出幾個計算的性質, 協助瞭解輪環框正多面體及其生成過程物件的屬性數計算。我們另外討論了大菱正方八面體、截角正八面體、截角正方體的分解及其生成的輪環多面體屬性。我們也提供了相關的影片協助讀者瞭解, 希望對有興趣的讀者有幫助。我們也將數學算板的1.08測試版放在 `https://mathboard.tw` 的下載區, 提供給有興趣的讀者下載測試。本文描述的「輪環框正多面體」, 透過「鏡射」及「極向轉」製作, 使用 3-3, 4-4, 5-5 正輪環多面體。這個製作過程好像只適用於柏拉圖五種正多面體, 對於其他多面體是否也可以作出相對應的「輪環框多面體」仍有待討論。

參考書目

1. 林保平。多面體的生成及動態模型製作在數學算板上的實踐(上)。科學教育月刊, 第 412 期, 31-49, 2018。
2. 林保平。四維空間初探在數學算板中的實踐。數學傳播季刊, 47(4), 53-67, 2023。
3. Lajos Szilassi, "Regular toroids" (PDF), *Structural Topology*, 13 (1986), 69-80. `http://www-iri.upc.es/people/ros/StructuralTopology/ST13/st13-06-a3-ocr.pdf`
4. Lajos Szilassi, On Three Classes of Regular Toroids. 3rd *International Conference APLIMAT*, 2004. `https://www.ams.stonybrook.edu/~coutsias/papers/FLEX/Szilassi.pdf`.

—本文作者爲台北市立教育大學數資系退休副教授—